

統計学

1 1. 確率変数と確率分布

発表者：西山知弥

確率変数

- ある変数の値をとる確率が存在する **変数** のこと
- サイコロを投げて出る目は, $\{1,2,3,4,5,6\}$ のいずれかで, それぞれの目が出る確率は $\frac{1}{6}$ なので **確率変数** であると言える
- サイコロの出る目を X とすると
$$P(X) = \frac{1}{6} \quad (X=1,2,3,4,5,6)$$
 と表すことができる

確率変数

- $P(X=3) = \frac{1}{6}$, $P(3) = \frac{1}{6}$

どちらも「さいころを投げて3の目が出る事象の確率は $\frac{1}{6}$ である」ということを表す

- コインの裏表のように事象に数字がない場合は？

表 . . . 「1」

裏 . . . 「0」

と対応させることで確率変数になる

この場合 $P(X) = \frac{1}{2} \quad (X=0,1)$ のように表せる

確率分布

- 確率変数がとる値とその値をとる確率の対応の様子を
確率分布という
- サイコロを投げる場合は, 1~6までの確率変数の値にそれぞれ $\frac{1}{6}$ という確率に対応しているので確率分布と言える

さいころの出る目の確率分布						
さいころの出る目	1	2	3	4	5	6
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

確率分布

- コインを投げる場合でも, 0(裏)と1(表)の確率変数にそれぞれ $\frac{1}{2}$ という確率に対応しているので、同様に確率分布と言える

コインの出る目の確率分布		
コインの裏表	表(=1)	裏(=0)
確率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

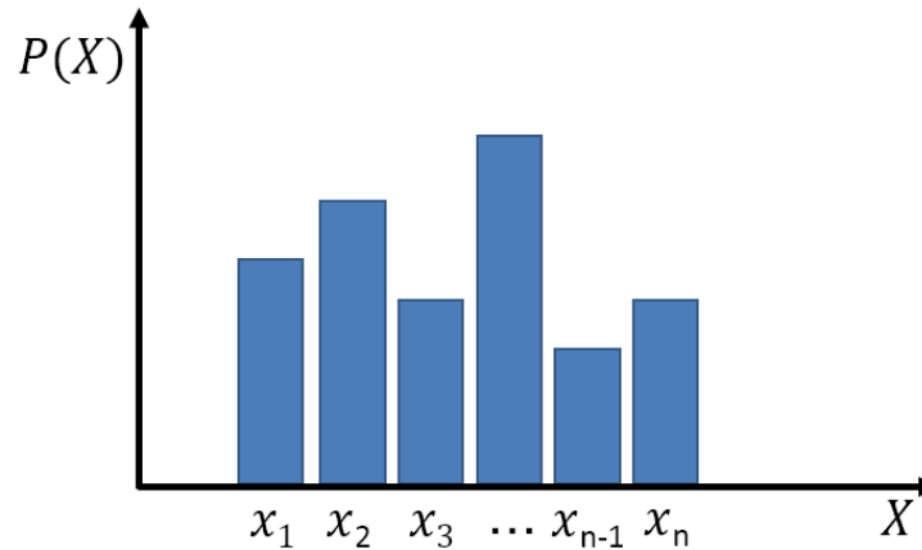
離散型確率変数

- サイコロの出る目のように、隣り合う数字の間には値が存在しない変数を離散型変数という
- ある離散型変数 X の取りうる値($x_1, x_2, \dots$)にそれぞれ対応する確率 p が存在する場合、この変数を離散型確率変数という

X	x_1	x_2	$\dots$	x_{n-1}	x_n
$P(X)$	p_1	p_2	$\dots$	p_{n-1}	p_n

離散型確率分布

- 確率変数が離散型である場合の確率分布を 離散型確率分布あるいは離散型分布という



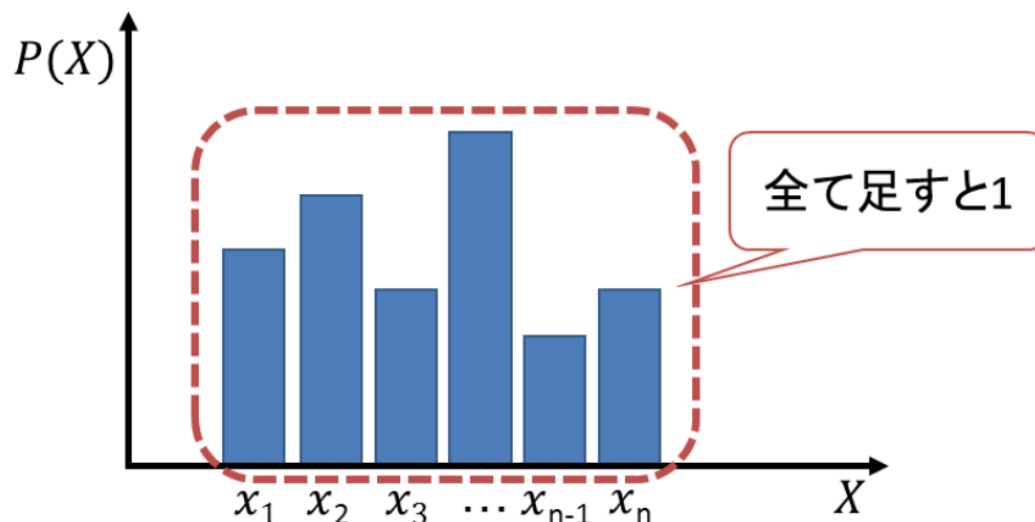
- 横軸は確率変数 X ,
縦軸は X の確率である $P(X)$ を表している

確率質量関数

- 離散型確率変数 X がある値 x をとる確率を $f(x)$ とした場合, $f(x)$ は**確率質量関数**と呼ばれる
- $f(x)$ を用いて, $X=x$ (ある値 x)となる確率を次のように表すことができる

$$f(x) = P(X = x)$$

- **全事象が起こる確率は1**であるため, 離散型確率分布では次のように表す



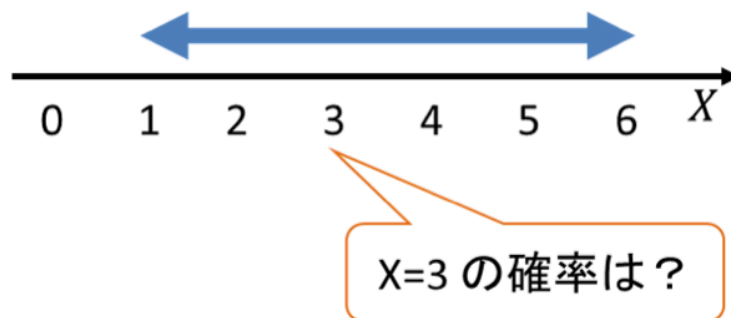
$$\sum_{i=1}^n P(X = x_i) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + \cdots + P(X = x_n) = 1$$

連続型確率分布

- 連続型変数とは?
重さや温度のように連続した値をとるもの
- 連続型変数の取りうる値に対応する確率が存在する場合,この変数を連続型確率変数と言う. 確率変数が連続型である場合の確率分布を連続型確率分布,あるいは連続型分布という

連続型確率分布

- 例題: 連続型変数 X がとる値を, 1~6までの実数とする.
 X がどの数値を取る確率も等しい時, **$X=3$** となる確率は?



- サイコロの時のように $P(X=3) = \frac{1}{6}$ とするのは誤り!
- 正しくは, **$P(X=3) = \frac{1}{\infty} = 0$**
 $X=3$ は無数に存在する値のうちの1点であるから

確率密度と確率密度関数

- **確率密度**とは定義域での **X の値の相対的な出やすさ**を表す
- 連続型確率変数 **X** がある値 **x** をとる確率密度を関数 **$f(x)$** とすると, **$f(x)$** を**確率密度関数**と呼ぶ. **$f(x)$** を用いて

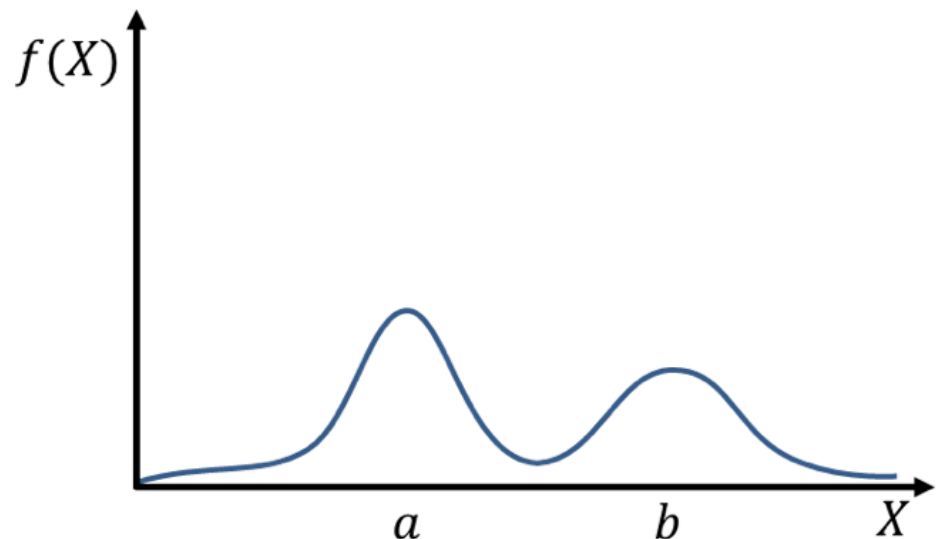
$f(x) = f(X=x)$ のように表すことができる

- 確率密度関数の例

横軸: 確率変数 **X**

縦軸: 確率密度

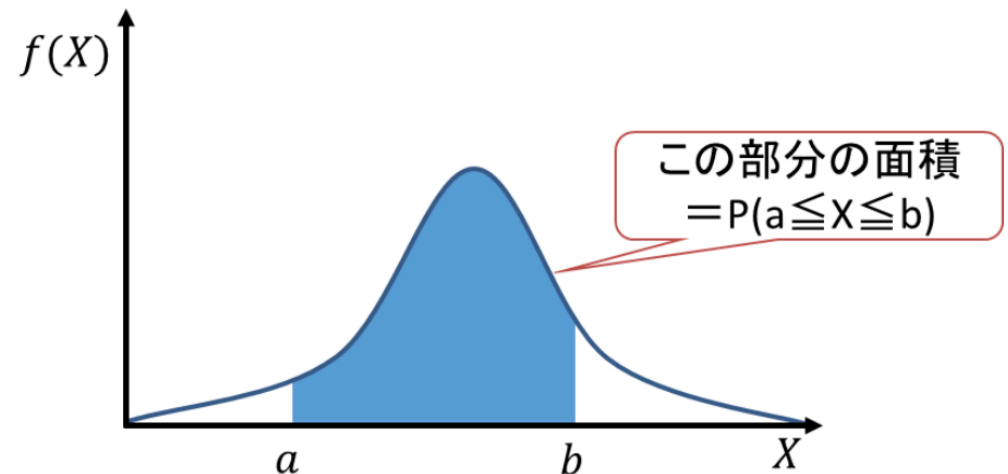
右のような確率密度関数から
どのようなことがいえる？



連続型確率分布と確率

- 連続型確率分布では確率変数がある1点をとる確率は0
ではどのようにして確率を求める？
- 1点だけを求めることはできないので、**一定の範囲を積分すること**で確率を求めることができる
- ある確率密度関数 $f(x)$ において $\mathbf{a \leq X \leq b}$ となる確率は次の積分で求められる

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

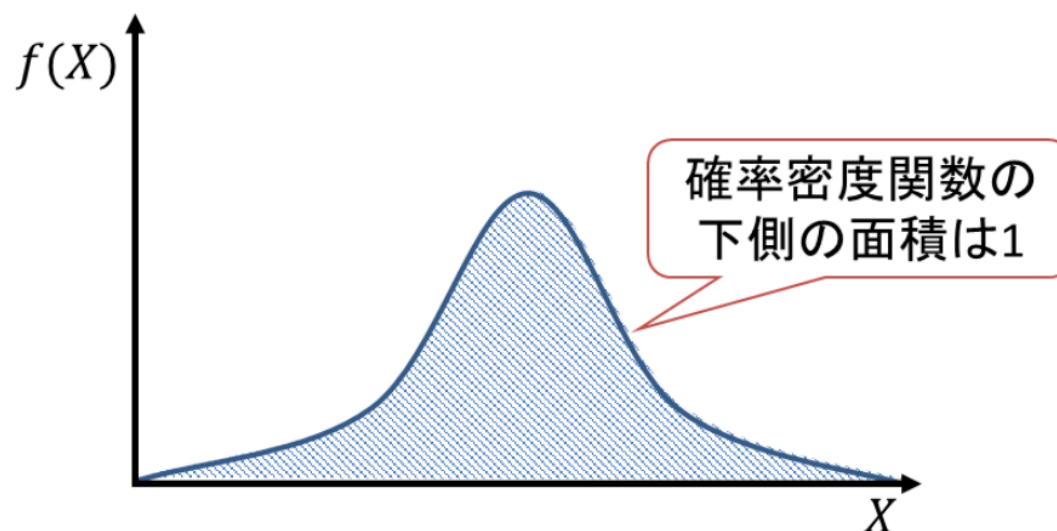


連続型確率分布と確率

- 確率では全事象が起こる確率は1であるので、連続型確率分布では次の式が成り立つ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

- これは、確率密度関数 $f(x)$ とX軸で囲まれる面積は1であることを意味する

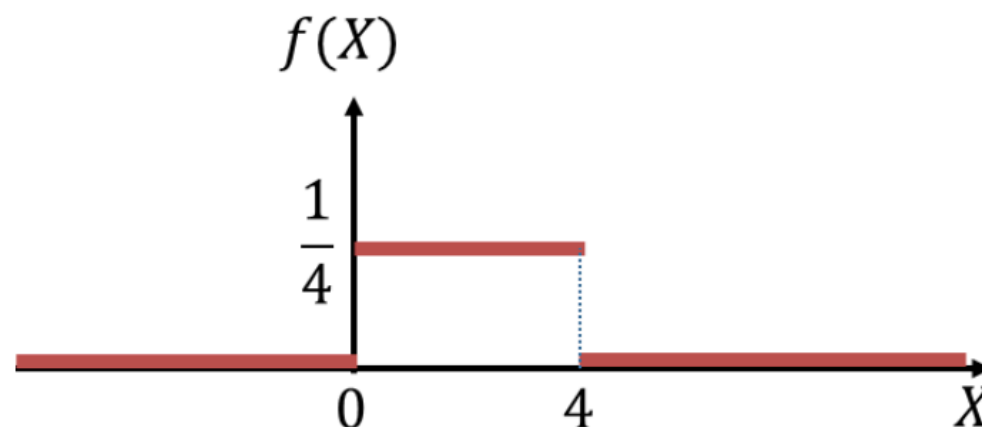


連続型確率分布と確率1

- 例題: 次のような確率密度関数があるとき, $0 \leq X \leq 1$ となる確率は?

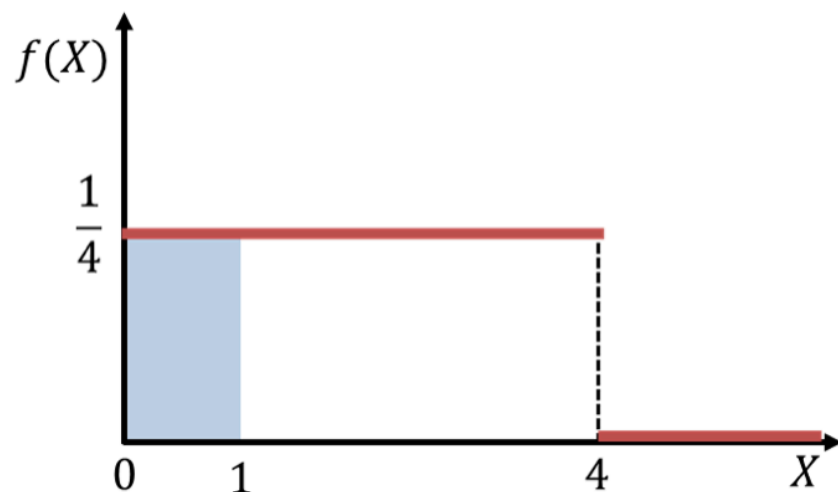
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & (0 \leq X \leq 4) \\ 0 & (X < 0, 4 < X) \end{cases}$$

- この確率密度関数をグラフに図示すると以下のようになる



連続型確率分布と確率1

- $P(0 \leq X \leq 1)$ は, グラフの青色の部分の面積



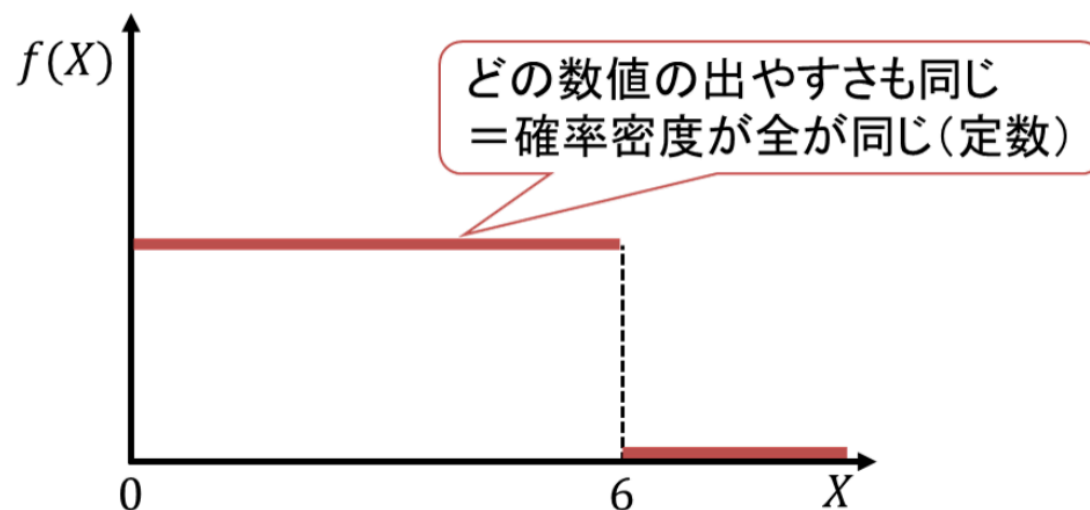
青色の部分の面積を計算すれば $P(0 \leq X \leq 1)$ となる確率が求まる

- この場合は長方形の面積を求めれば良いので,

$$\begin{aligned} P(0 \leq X \leq 1) &= \int_0^1 \frac{1}{4} dx \\ &= 1 \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

連続型確率分布と確率2

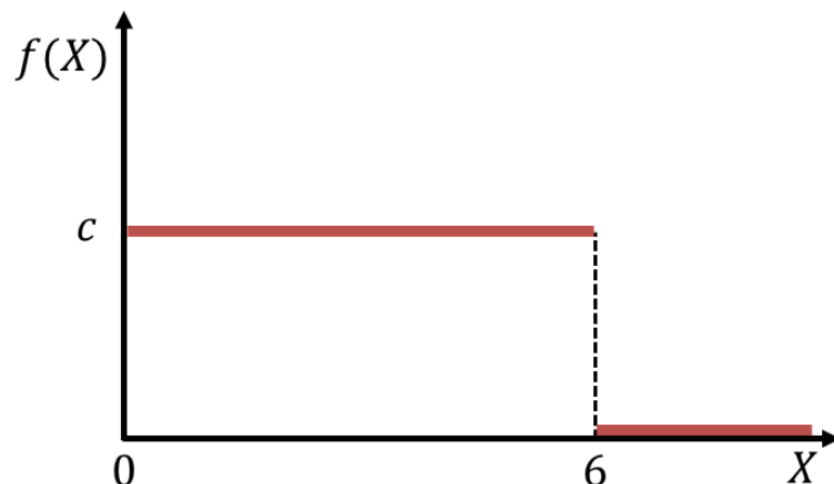
- 例題：連続型変数 X がとる値の範囲を, $0 \sim 6$ までの実数とする. X がどの数値を取る確率も等しい時, $2 \leq X \leq 3$ となる確率は？



- 先ほどの例題と何が違う？
 - ・ ・ ・ 縦軸の確率密度の値が与えられていない

連続型確率分布と確率2

- そこで確率密度を c とおく



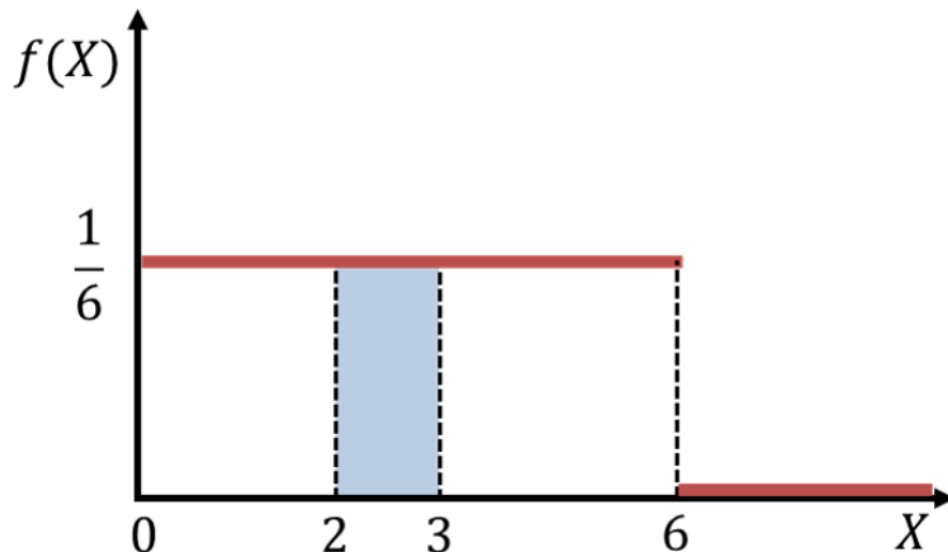
- 確率密度関数 $f(x)$ と X 軸で囲まれる面積は1の性質を利用すると

$$6 \times c = 1$$

$$c = \frac{1}{6}$$

よって $f(x) = \frac{1}{6}$ が求める確率密度関数

連続型確率分布と確率2



- 確率密度関数は上のグラフのようになり, $P(2 \leq X \leq 3)$ となる確率は青い部分の面積を求めれば良い
- 先ほどの例題と同様に

$$\begin{aligned} P(2 \leq X \leq 3) &= \int_2^3 \frac{1}{6} dx \\ &= \frac{1}{6} \times 1 \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$