

2つの比率の差の検定
-離散量の2群間比較-

60161017

金城 清史

資料

- 医薬研究者の視点からみた道具としての統計学
奥田千恵子 著
- 10章 「2つの比率の差の検定」



9章との違い

○対象は比率

1. 男性と女性のアレルギー疾患の有病率に差があるか
2. 30歳代と40歳代の健康診断受診率に差があるか
3. ラットの紫外線照射群と対象群でガンの発生率に差があるか

- 2つの母集団の比率を比較する方法を扱う



比較に用いられる検定法

○ 2群間で、生存／死亡、有効／無効などの2値変数の検定を行う場合

1. 正規分布に近似させる方法

2. χ^2 検定

3. フィッシャーの直接確率法

※対応のある2値変数を比較する場合は、マクニマーの検定を行う



1. 正規分布に近似させる方法



検定法を使う条件

- 正規分布に近似させる検定を行う条件
 1. 標本は2値変数
 2. 標本は母集団から無作為に抽出されている
 3. 標本が互いに独立している
 4. 標本数や、各カテゴリーの生起確率がある程度おおきい
- 3)満たされない場合はマクニマーの検定
- 4)標本数を n 、1つのカテゴリーの正規確率を p とすると、両標本とも $np > 5$ かつ $n(1-p) > 5$ である



検定法の手順(1)

例) 試験薬剤(50人)およびブラゼボ(48人)投与による有効率はそれぞれ70%、50%であった。両群に差があるか？

- 2つの標本を併合する

- 併合した比率

$$\hat{p} = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2} = \frac{50 \times 0.7 + 48 \times 0.5}{50 + 48} = 0.602$$

- 標準誤差

$$\begin{aligned} SE_{pd} &= \sqrt{\hat{p}(1 - p) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)} \\ &= \sqrt{0.602(1 - 0.602) \times \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{48} \right)} = 0.099 \end{aligned}$$



検定法の手順(2)

- 2つの比率を標準化したz値をもとめる

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{SE_{pd}} = \frac{0.7 - 0.5}{0.099} = 2.022$$

- z値に対応する標準正規累積確率を求める

$$NORMSDIST(z)=0.978$$

全体からひく

$$1-0.978=0.022$$

両側検定なので2倍すると

$$0.022 \times 2 = 0.044 < 0.05$$

両側検定、有意水準5%で、両群間に差があるといえる



イエーツの補正

- 離散量の分布を連続量分布に近似させているため、z値は多めに計算されている
 - α 過誤率が増加してしまう
- イエーツの補正

$$z = \frac{|\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2| - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}{SE_{pd}}$$



2. χ^2 検定



検定法を使う条件

○ χ^2 検定を使う条件

1. 標本は母集団から無作為に抽出されている
2. 標本が互いに独立している
3. 標本数や、各カテゴリーの生起確率がある程度大きい

- 2) が満たされない場合はマクニマーの検定

- 3) 各セルの期待度数が5以上であること

- もし満たされない場合は、 χ^2 分布からのずれがおおきくなるのでフィッシャーの直接確率法を用いる

○ χ^2 検定は独立性の検定



クロステーブル

- 2群間で、2つのカテゴリで表されたデータの差を検定する場合は、 2×2 クロステーブルを作る

	カテゴリ1	カテゴリ2	合計
群1	a	b	a+b
群2	c	d	c+d
合計	a+c	b+d	a+b+c+d=n



例) クロステータブル

- 試験薬剤(50人)、およびプラセボ(48人)投与による有効率はそれぞれ70%、50%だった場合

	観察有効数	観察無効数	合計
試験薬群	$a=50 \times 0.7=35$	$b=50 \times 0.3=15$	$a+b=50$
プラセボ群	$c=48 \times 0.5=24$	$d=48 \times 0.5=24$	$c+d=48$
合計	$a+c=59$	$b+d=39$	$n=98$



期待値のクロステーブル

- 帰無仮説「2変数は独立である」がただしければ、各カテゴリの出現率は両群で等しく、両群を併合した時の値になるはず

両群を併合した有効率= $(a+c)/n=59/98=0.602$

	期待有効数	期待無効数	合計
試験薬群	$a=50 \times 0.602$	$b=50 \times (1-0.602)=19.9$	$a+b=50$
プラセボ群	$c=48 \times 0.602$	$d=48 \times (1-0.602)=19.1$	$c+d=48$
合計	$a+c=59$	$b+d=39$	$n=98$



検定法の計算手順(1)

- 観察度数 **O** と期待度数 **E** を用いると

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \sum \frac{(O - E)^2}{E} \\ &= \frac{(35 - 30.1)^2}{30.1} + \frac{(15 - 19.9)^2}{19.9} \\ &\quad + \frac{(24 - 28.9)^2}{28.9} + \frac{(24 - 19.1)^2}{19.1} \\ &= 4.092 \end{aligned}$$

自由度 $df = (m-1) \times (n-1) = (2-1) \times (2-1) = 1$



検定法の計算手順(2)

○ χ^2 値に対応する確率Pを求める

$$P = \text{CHIDIST}(4.092, 1) = 0.043 < 0.05$$

有意水準5%で、有効率は群に依存している。
すなわち2群間に有意差があるといえる。



イエーツの補正

○ イエーツの補正

$$x^2 = \sum \frac{\left(|O - E| - \frac{1}{2}\right)^2}{E}$$



3. フィッシャーの直接確率法



使う条件

- フィッシャーの直接確率法を行う条件
 1. 標本は2値変数である
 2. 標本は母集団から無作為に抽出されている
 3. 標本が互いに独立している
 4. 標本数や、各カテゴリーの生起確率が小さい
- 3) が満たされていない場合は、データの対応を考慮したマクニマーの検定法を使う
- 4) はコンピュータの計算能力に関わる問題で、計算可能なら満たされなくても問題ない



計算手順

- Q) 以下のようなクロステーブルが得られた。試験薬群とプラセボ群の間に差はあるか？

	観察有効数	観察無効数	合計
試験薬群	7	3	10
プラセボ群	1	7	8
合計	8	10	18



確率の計算

$$P = \frac{(a+b)! (c+d)! (a+c)! (b+d)!}{a! b! c! d! n!}$$

$$P = \frac{10! 8! 8! 10!}{7! 3! 1! 7! 18!} = 0.022$$



周辺度数による計算

- 周辺度数を固定して得られる組みをすべて計算する

7	3	10
1	7	8
8	10	18

P=0.022

4	6	10
4	4	8
8	10	18

P=0.336

実際に観察された度数の組み合わせと、それより小さな確率となる場合を合計する

0	0	0
8	10	18

P=0.154

0	2	0
8	10	18

P=0.029

1	9	10
7	1	8
8	10	18

P=0.002

0	10	10
8	0	8
8	10	18

P=0.000

8	2	10
0	8	8
8	10	18

P=0.001

$$P=0.022+0.001+0.000+0.002$$
$$=0.025<0.05$$

両側検定、有意水準5%で、このようなデータパターンは偶然によるものではない
すなわち、両群間に差があるといえる



4. マクニマーの検定



検定法を使う条件

○ マクニマーの検定を使う条件

1. 標本は2値変数である
 2. 標本が何らかの形で対になっている
 3. 対になった標本は母集団から無作為に抽出されている
 4. 標本数や、各カテゴリの生起確率がある程度大きい
- 4) が満たされていない場合は χ^2 分布からのずれが大きくなる
 - χ^2 を利用する



対応のある比率データテーブル

- 同じ対象に2種類の検査をして陽性(+)、陰性(-)の2値変数として判定をおこなった場合

	検査1	検査2	度数
1	+	+	n_1
2	+	-	n_2
3	-	+	n_3
4	-	-	n_4

両方の結果が一致した1、4は無視し、2、3のみを用いる



計算手順(1)

- Q)同じ対象に対して2種類の検査をして以下のような結果を得た。2つの検査の陽性率に差はあるか

	検査1	検査2	度数
1	+	+	17
2	+	—	22
3	—	+	8
4	—	—	7



計算手順(2)

$$\begin{aligned}x^2 &= \frac{(|n_2 - n_3| - 1)^2}{n_2 n_3} \\&= \frac{(|22 - 8| - 1)^2}{22 + 8} = 5.633\end{aligned}$$

○ x^2 値に対応する確率Pを求める

$$P = \text{CHIDIST}(5.633, 1) = 0.018 < 0.05$$

有意水準5%で、陽性率は検査法に依存している。すなわち2つの検査の陽性率に有意差があると言える。



まとめ

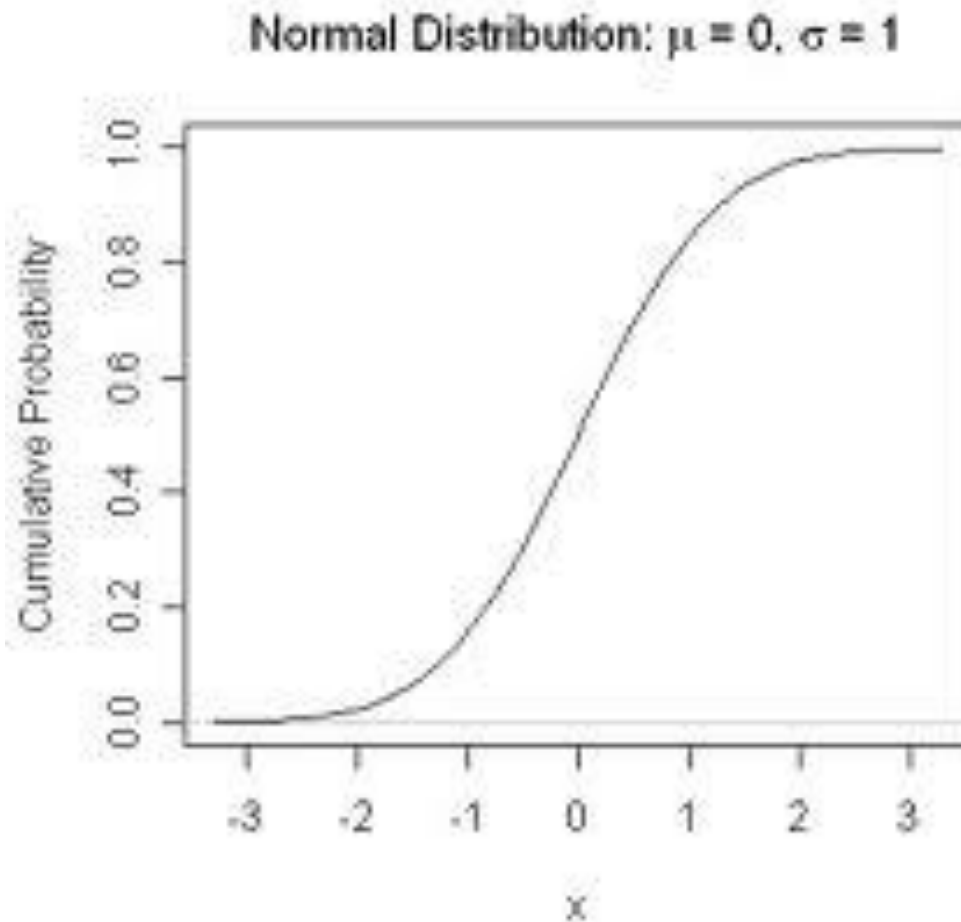
- 4つの検定法についての利用条件とその計算方法について学んだ
- α 過誤率が増加するのを防ぐためにイエーツの補正がある



終わり



標準正規累積確率



標準正規累積確率

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5	0.504	0.508	0.512	0.516	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.591	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.648	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.67	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.695	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.719	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.758	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.791	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.834	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.877	0.879	0.881	0.883
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.898	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.937	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.975	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.983	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.985	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.989
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.992	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.994	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952



連続補正した場合(正規分布)

$$z = \frac{|\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2| - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}{SE_{pd}}$$
$$= \frac{|0.7 - 0.5| - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{48} \right)}{0.099} = 1.816$$

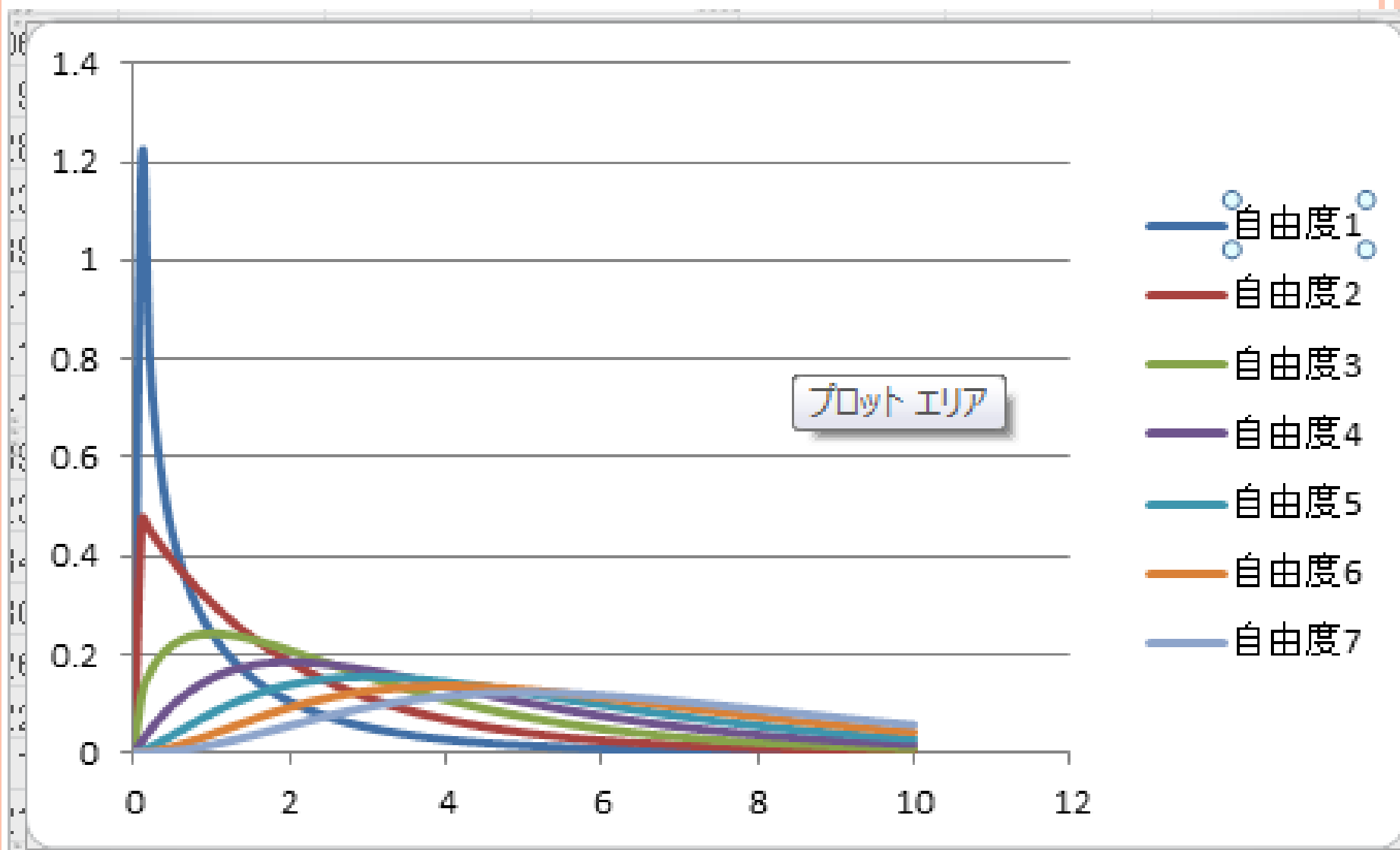
$$\text{NORMSDIST}(1.816) = 0.965$$

$$2(1 - 0.965) = 0.070 > 0.05$$

両側検定、有意水準5%で、
両群間に差があるとはいえない。



χ^2 分布



連続補正した場合(χ^2 検定)

$$\chi^2 = \sum \frac{\left(|O-E| - \frac{1}{2}\right)^2}{E} =$$
$$\frac{(|35-30.1|-0.5)^2}{30.1} + \frac{(|15-19.9|-0.5)^2}{19.9} +$$
$$\frac{(|24-28.9|-0.5)^2}{28.9} + \frac{(|24-19.1|-0.5)^2}{19.1} = 3.300$$

$$P = \text{CHIDIST}(3.300, 1) = 0.069 > 0.05$$

有意水準5%で、有効率は群と独立している
2群間に有意差があるとはいえない

