

第19講～第21講

発表者

NUR ATHIRAH

60226192

第19講

母分散は,母平均を 知らなくても推定できる

母平均が未知の正規母集団を区間
推定

方法

- ステップ 1 :
 - 標本平均を計算する
 - ステップ 1 + 2 :
 - 偏差を作り、その2乗和を母分散で割って統計量Wを作る
- ステップ 2 :
 - 標本分散に n を掛けて母分散で割る
- ステップ 3 : 自由度 $(n - 1)$ の95パーセント予言的中区間
- ステップ 4 : 母分散の95パーセント信頼区間を求める
 - Wがステップ 3 の区間に入るような σ^2 を残し, 入らない σ^2 を棄却する

例題

- ある蝶の体長は
 - 76ミリ, 85ミリ, 82ミリ, 80ミリ, 77ミリ

- 標本平均 $\bar{x} = \frac{76+85+82+80+77}{5} = 80$

- 標本分散 $s^2 = \frac{(-4)^2+5^2+2^2+0^2+(-3)^2}{5} = 10.8$

- $W = \frac{ns^2}{\sigma^2} = \frac{5 \times 10.8}{\sigma^2} = \frac{54}{\sigma^2}$

- 自由度 (5-1=) 4のカイ二乗分布の
95パーセント予言的中区間は
0.4844~11.1433

自由度	0.975	0.025
1	0.001	5.023
2	0.0506	7.377
3	0.2157	9.3484
4	0.4844	11.1433
5	0.8312	12.8325
6	1.2373	14.4494
7	1.6898	16.0128

例題

- 不等式を書き

$$0.4844 \leq \frac{54}{\sigma^2} \leq 11.1433$$

$$4.85 \leq \sigma^2 \leq 111.48$$

- したがって, 蝶の体長の母分散の95パーセント信頼区間は

$$4.85 \leq \sigma^2 \leq 111.48$$

第20講 いよいよt分布の登場

母平均以外は「現実には観測された
標本」で計算できる統計量

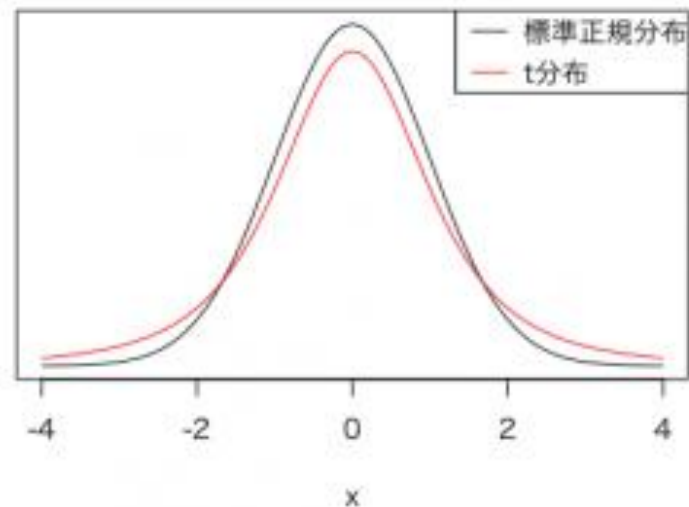
t分布

- 母平均 μ 以外はすべて観測されたデータだけから計算される
- 母平均 μ を区間推定できる

t分布のヒストグラム

- 正規分布とそっくり
- 緩い山型
- 頂上が低く,裾野のところが高い

標準正規分布と自由度3のt分布



計算量Tの計算

- ステップ 1 : 標本平均 $\bar{x}$
- ステップ 2 : 標本標準偏差 s
- ステップ 3 : 下の式を利用し, 計算する

$$T = \frac{(\bar{x} - \mu)\sqrt{n-1}}{s}$$

t分布の正式な定義について

- t分布の正式な定義：

- (標準正規分布のデータ z) $\times \sqrt{(W \text{の自由度 } k)} \div \sqrt{(\text{カイ二乗分布 } W)}$

$$T = \frac{z\sqrt{k}}{\sqrt{W}}$$

- 標準正規分布に従う統計量：

$$U = \frac{(\bar{x} - \mu)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

- カイ二乗分布に従う統計量：

$$W = \frac{s^2 n}{\sigma^2}$$

自由度 (n-1)

t分布の計算式

$$\frac{U\sqrt{n-1}}{\sqrt{W}} = \frac{\left(\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\sqrt{n-1}}{\sqrt{\frac{S^2 n}{\sigma^2}}}$$

$$= \left(\frac{\bar{x} - \mu}{\cancel{\sigma/\sqrt{n}}}\right)\sqrt{n-1} \frac{\cancel{\sigma}}{s\sqrt{n}}$$

$$= \frac{(\bar{x} - \mu)\sqrt{n-1}}{s}$$

例題

- 母平均 $\mu=6$ の正規母集団から, 5個のデータ1,5,7,9,13が観測された.このとき, 統計量Tを計算せよ.

- 標本平均

$$\bar{x} = \frac{1 + 5 + 7 + 9 + 13}{5} = 7$$

- 標本標準偏差

$$s^2 = \frac{(1-7)^2 + (5-7)^2 + (7-7)^2 + (9-7)^2 + (13-7)^2}{5}$$

$$= \frac{(-6)^2 + (-2)^2 + 0^2 + 2^2 + 6^2}{5} = 16$$

$$s = \sqrt{16} = 4$$

- 統計量T

$$T = \frac{(\bar{x} - \mu)\sqrt{n-1}}{s} = \frac{(7-6)\sqrt{5-1}}{4} = 0.5$$

第21講

t分布による区間推定

正規母集団で母分散がわからない
ときの母平均の推定

推定法

- ステップ 1 : 標本平均と標本標準偏差を計算する
- ステップ 2 : t分布に従う統計量Tを計算する
- ステップ 3 : $-\alpha \leq T \leq +\alpha$ という95パーセント予言的中区間を作る
- ステップ 4 :

$$-\alpha \leq \frac{(\bar{x} - \mu)\sqrt{n-1}}{s} \leq +\alpha$$

を μ について解けば, それが95パーセント
信頼区間となる

例題

- ある蝶の体長は
 - 76ミリ, 85ミリ, 82ミリ, 83ミリ, 76ミリ, 78ミリ
- 標本平均 $\bar{x} = \frac{76+85+82+83+76+78}{6} = 80$
- 標本分散 $s^2 = \frac{(-4)^2+5^2+2^2+3^2+(-4)^2+(-2)^2}{6} = 12.33$
- 標本標準偏差 $s = \sqrt{12.33} = 3.51$
- 代入して,

$$T = \frac{(80 - \mu)\sqrt{5}}{3.51}$$

例題

- 自由度 (6-1=) 5 の95パーセント予言的中区間は

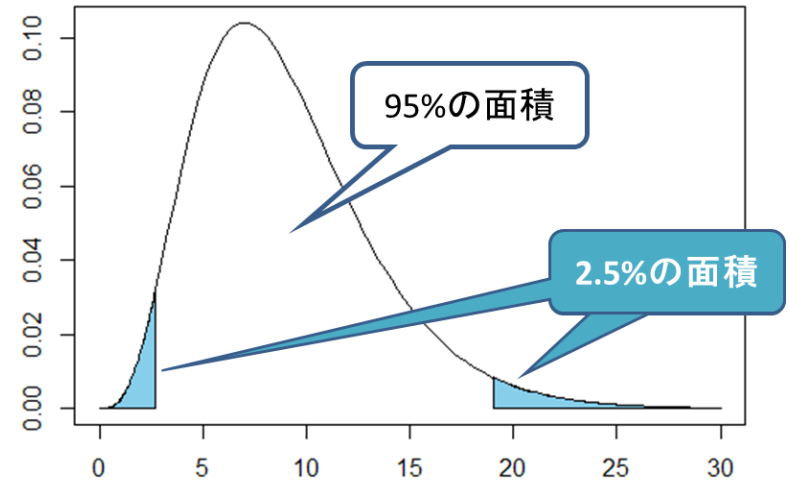
$$-2.571 \leq \frac{(80 - \mu)\sqrt{5}}{3.51} \leq +2.571$$

- 不等式を立てて,
 $-2.571 \leq (80 - \mu) \times 0.637 \leq +2.571$

- 不等式を解く
 $-4.036 \leq (80 - \mu) \leq +4.036$
 $\mu - 4.036 \leq 80 \leq \mu + 4.036$
 $75.964 \leq \mu \leq 84.036$

自由度	限界値
1	12.706
2	4.303
3	3.182
4	2.776
5	2.571
6	2.447

補足



- カイ二乗分布の95%信頼区間

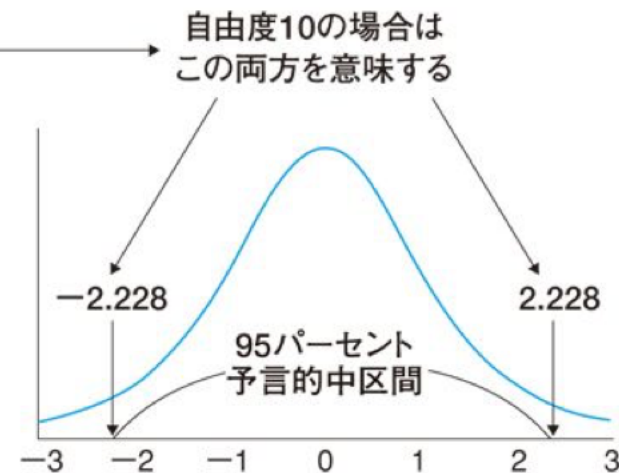
自由度	0.975	0.025
1	0.001	5.023
2	0.0506	7.377
3	0.2157	9.3484
4	0.4844	11.1433
5	0.8312	12.8325
6	1.2373	14.4494
7	1.6898	16.0128

補足

図表21-1 t分布の予言的中区間

t分布の95パーセント予言的中区間

自由度	限界値	自由度	限界値
1	12.706	10	2.228
2	4.303	30	2.042
3	3.182	60	2.000
4	2.776	120	1.980
5	2.571		
6	2.447		
7	2.365		
8	2.306		
9	2.262		



自由度が120になると、限界値が1.98となって1.96に近づいている。
これは自由度が大きくなるとt分布は正規分布に近づくことを意味する。