

統計学入門

第17講, 第18講

発表者: 辻 裕真

第17講

母分散をカイ二乗分布で推定する
—正規母集団の母分散を推定

カイ二乗分布の 95パーセント予言的中区間

正規分布と同様に,カイ二乗分布についても範囲を指定してその範囲に V が入るという予言を95パーセントの確率で的中させることが可能

カイニ乗分布の 95パーセント予言的中区間

自由度	0.975	0.025
1	0.001	5.023
2	0.0506	7.377
3	0.2157	9.3484
4	0.4844	11.1433
5	0.8312	12.8325
6	1.2373	14.4494
7	1.6898	16.0128

表の数値以上の
データの相対度数が
97.5%または2.5%

自由度5のカイ二乗分布

表から $0.8312 \leq V$ となる相対度数が97.5%,
 $12.8325 \leq V$ となる相対度数が2.5%なので

$$0.8312 \leq V \leq 12.8325$$

となる相対度数は95%となる

* 12.8325の値を含めても確率には影響を及ぼさないので
正規分布の予言と合わせるために含める

カイ二乗分布する統計量を作る

母平均 μ , 母標準偏差 σ の正規母集団の標本 x から $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ として z を作ると z が標準正規分布になることを利用して x と μ からカイ二乗分布する統計量を作る

カイ二乗分布する統計量を作る

母平均 μ , 母標準偏差 σ の正規母集団から n 個の標本 $x_1, x_2, \dots, x_n$ を観測し,

$$V = \left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x_n - \mu}{\sigma}\right)^2$$

を計算すると V は自由度 n のカイ二乗分布をする

例題

ある蝶の体長の母集団は,母平均80ミリの正規母集団とわかっているとする.このとき,観測した3体の体長が76ミリ, 85ミリ, 83ミリだった場合に,母分散 σ^2 の95パーセント信頼区間を求めよ.

例題

$$V = \left(\frac{76-80}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{85-80}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{83-80}{\sigma}\right)^2 = \frac{50}{\sigma^2}$$

4ページの表から,

$$0.2157 \leq \frac{50}{\sigma^2} \leq 9.3484$$

$$5.34 \leq \sigma^2 \leq 231.80$$

となり,母分散は5.34以上231.80以下の数値であると推定できる

第18講

標本分散はカイ二乗分布する
一標本分散と比例する統計量 W

統計量 W

第17講では母平均 μ を用いて統計量 V を作っていたが,母平均が分かっているという状況はやや不自然

標本平均 $\bar{x}$ を用いて統計量 W を作ってもカイ二乗分布であることは維持される

統計量W

$$W = \left(\frac{x_1 - \bar{x}}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - \bar{x}}{\sigma}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x_n - \bar{x}}{\sigma}\right)^2$$

ここで、標本分散 s^2 を確認すると...

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

分子が一致している

Wは標本分散に比例する統計量である

標本分散のカイ二乗分布の自由度

統計量 V はデータ数 n のとき, 自由度 n のカイ二乗分布に従ったが,

統計量 W はデータ数 n のとき自由度 $(n - 1)$ のカイ二乗分布に従う

カイ二乗分布するW

母平均 μ , 母標準偏差 σ の正規母集団から n 個の標本を観測し計測した分散を s^2 とするとき,

$$W = \frac{s^2 * n}{\sigma^2}$$

を作ると,自由度($n - 1$)のカイ二乗分布に従う

まとめ

母平均が分かっているとき,

$$V = \left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x_n - \mu}{\sigma}\right)^2$$

は自由度 n のカイ二乗分布に従う

標本平均を用いた

$$W = \left(\frac{x_1 - \bar{x}}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - \bar{x}}{\sigma}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x_n - \bar{x}}{\sigma}\right)^2 = \frac{s^2 * n}{\sigma^2}$$

は自由度 $(n - 1)$ のカイ二乗分布に従う