

母集団と標本

発表者 大東

目次

- 標本抽出
- 標本平均,標本分散
- カイ²乗分布
- ティー分布
- エフ分布
- チェビシエフの不等式

標本抽出

- 調査

標本調査, 全数調査

母集団(有限母集団, 無限母集団) → 調査対象全体

標本抽出 → 標本(サンプル)を母集団から取り出す.

様々な標本抽出法

- **復元抽出**

取り出したものを元に戻してから次を取り出す.

- **非復元抽出**

取り出したものを元に戻さないで次を取り出す.

- **有意抽出法**

調査員が自己の経験によって,母集団の代表と思われるものを選び出す.

- **無作為抽出**

乱数を用いてランダムに選び出す.

標本平均と標本分散

母平均を $\mu = E(X)$, 母分散を $\sigma^2 = V(X)$ とした時

- 標本平均

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

- 標本分散

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

標本平均と標本分散の関係式

$$\bullet \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 = S^2 + (X - \mu)^2$$

標本の母平均 μ 周りの2乗平均が,「標本分散 S^2 」
と「標本平均 X と μ の差の2乗」との和に分解される.

不偏標本分散(不偏分散)

- $U^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{n}{n-1} S^2$

- $E(U^2) = \frac{n}{n-1} E(S^2) = \sigma^2$

- $U^2 \rightarrow$ 不偏標本分散(不偏分散)

カイ2乗分布

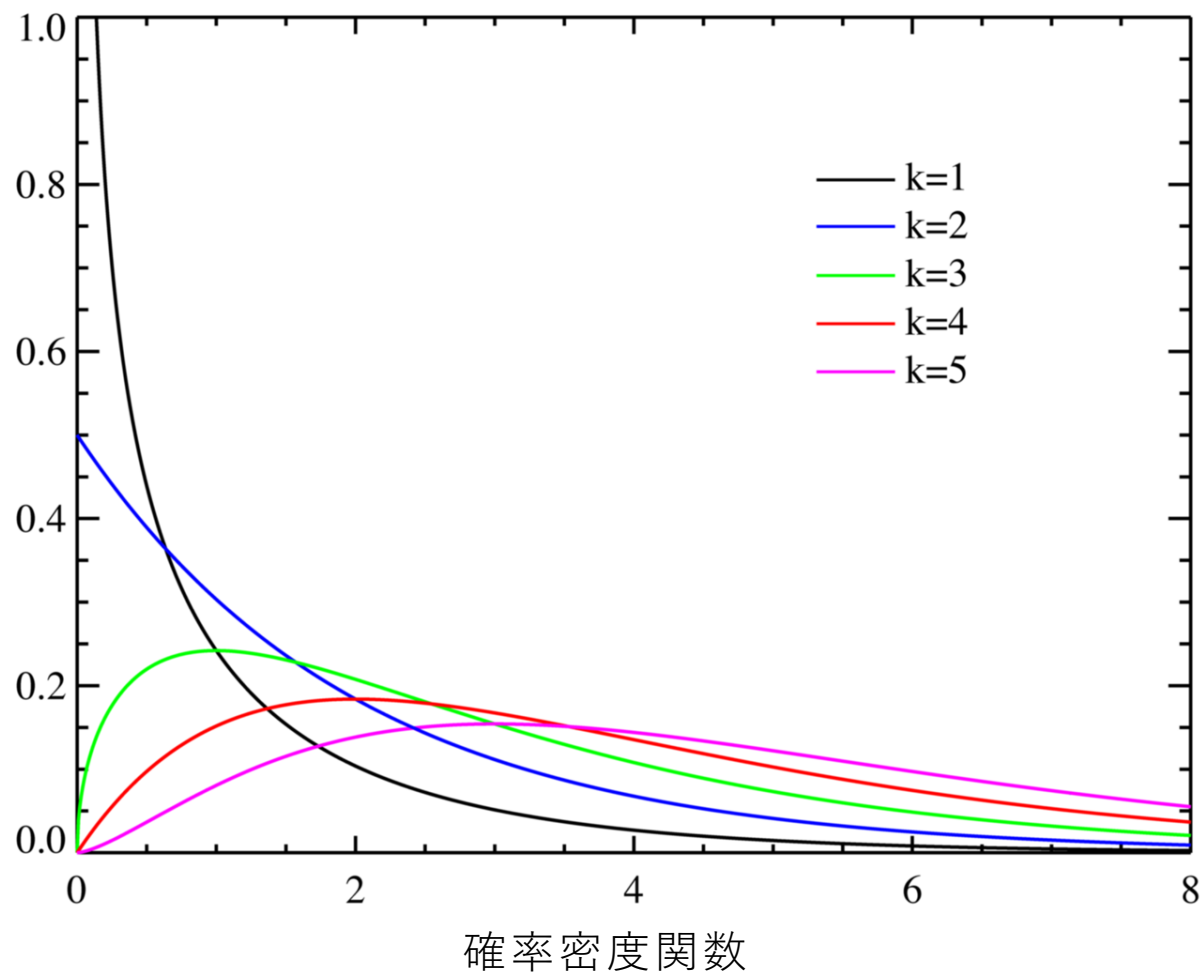
- 平均が0,分散が1の標準正規分布 $N(0,1)$ に従う
 ν 個の標本の2乗の合計 X が従う確率分布を自由度 ν のカイ2乗分布と呼ぶ

$$X = \sum_{i=1}^{\nu} Z_i^2$$

自由度 ν のカイ2乗分布に従う X の平均と分散は,

$$E(X) = \nu \quad V(X) = 2\nu$$

カイ2乗分布



テ ィ ー 分 布

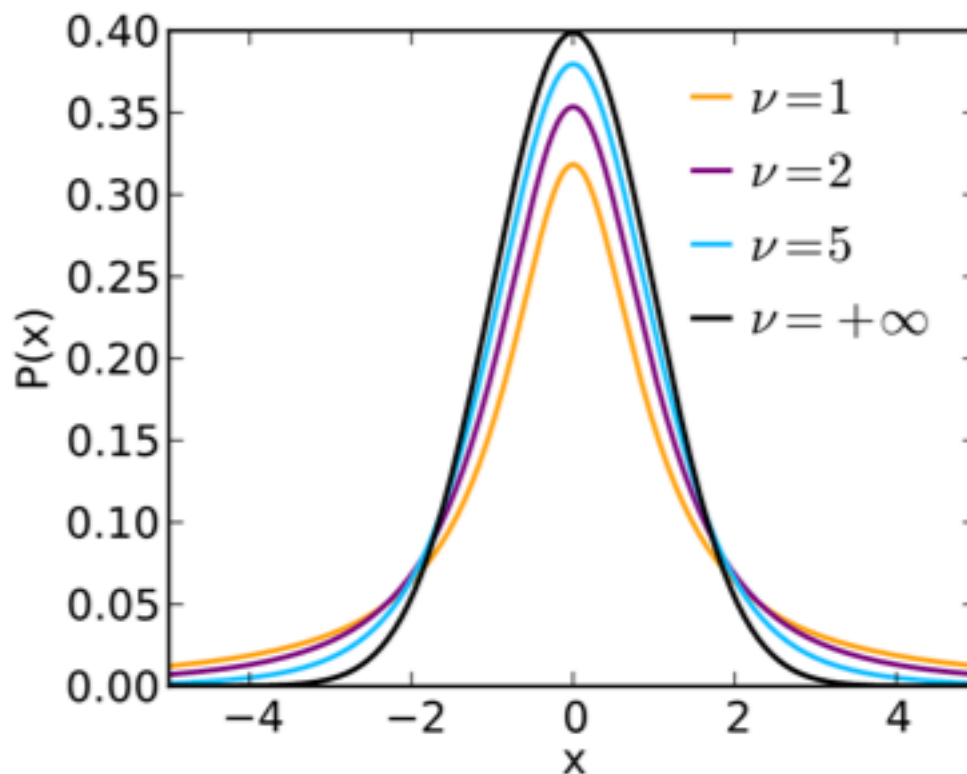
- 確率変数 X が標準正規分布 $N(0,1)$ に従い, Y が自由度 ν のカイ²乗分布に従う時, X,Y が独立であれば,

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{\nu}}}$$

これは自由度 ν のテ ィ ー 分 布 に 従 う .

テ ィ ー 分 布

- 正規分布に従う母集団の平均と,分散が未知で標本サイズが小さいサイズの場合に平均を求める時に使用される.



エフ分布

- 確率変数 X, Y が独立で,それぞれ自由度 ν_1, ν_2 ,のカイ²乗分布に従うとき

$$F = \frac{X/\nu_1}{Y/\nu_2}$$

これは自由度 ν_1, ν_2 のエフ分布に従う.

エフ分布

- F検定で帰無仮説に従う分布として用いられる.
- 正規分布に従う二つの群に対して,「標準偏差が等しい」という仮説の検定や,分散分析に応用される.

チェビシェフの不等式

- 確率変数 X が平均 μ , 分散 σ^2 を持つとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 次の不等式が成り立つ.

$$P(|X - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

チェビシェフの不等式

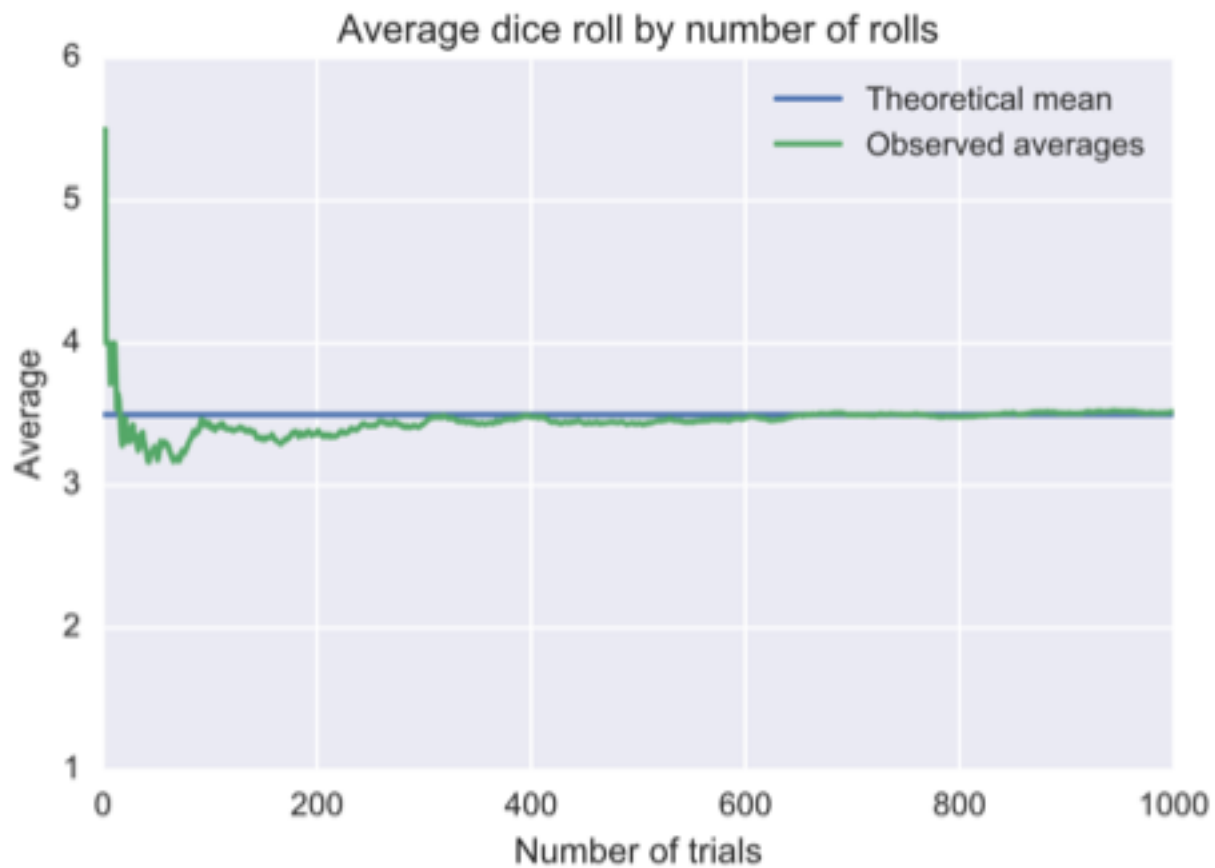
大数の法則

- 母平均 μ をもつ分布からの無作為標本 $X_1, \dots, X_n$ の標本平均 $\overline{X_n}$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 次の式が成り立つ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\overline{X_n} - \mu| > \varepsilon) = 0$$

(例)サイコロを何度もふり続けると標本平均は平均に収束する.

大数の法則



中心極限定理

母集団が正規分布に従わなくても,標本数 n が十分に大きい時,標本平均と真の平均の誤差は正規分布に従う.

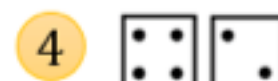
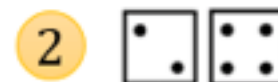
$$P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq \alpha\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (n \rightarrow \infty).$$

中心極限定理



出目の平均が1
になる確率

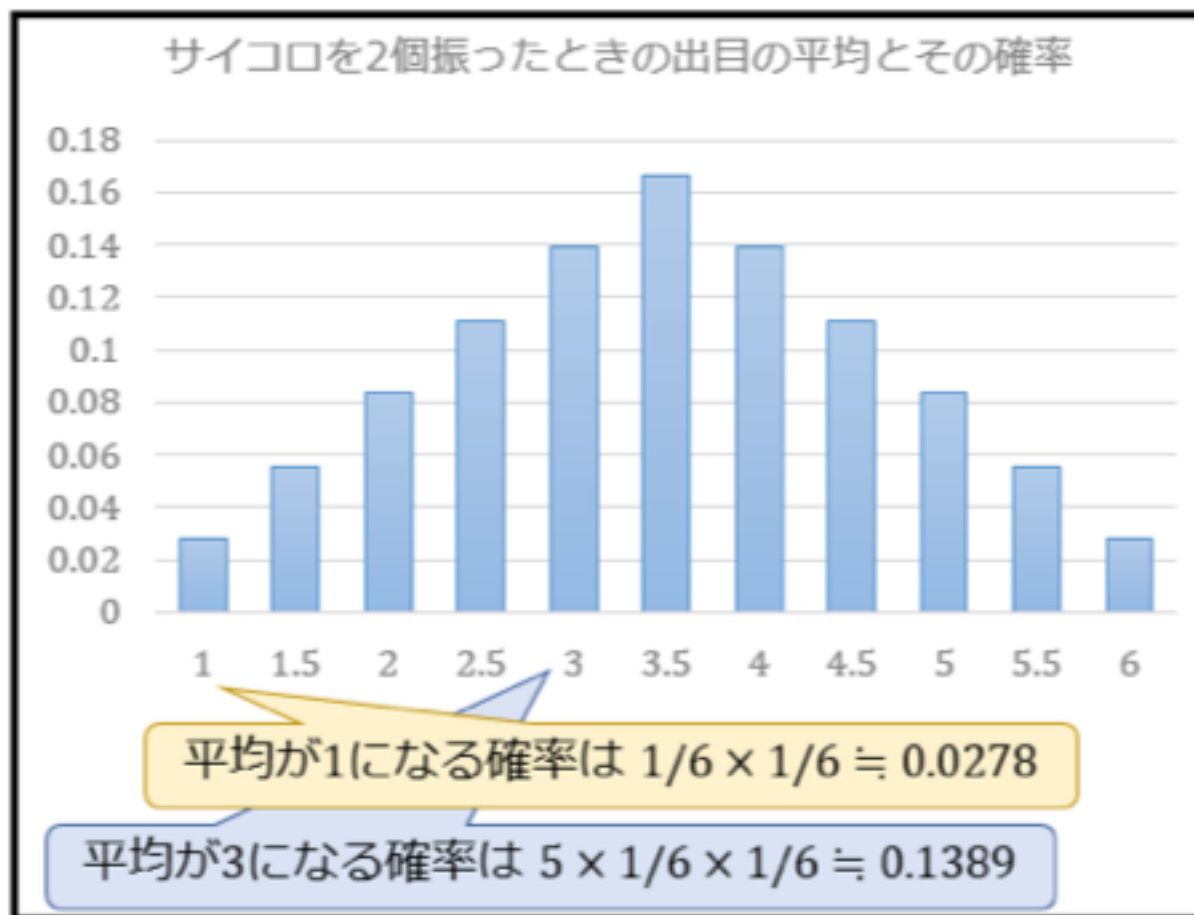
$$1/6 \times 1/6 \approx 0.0278$$



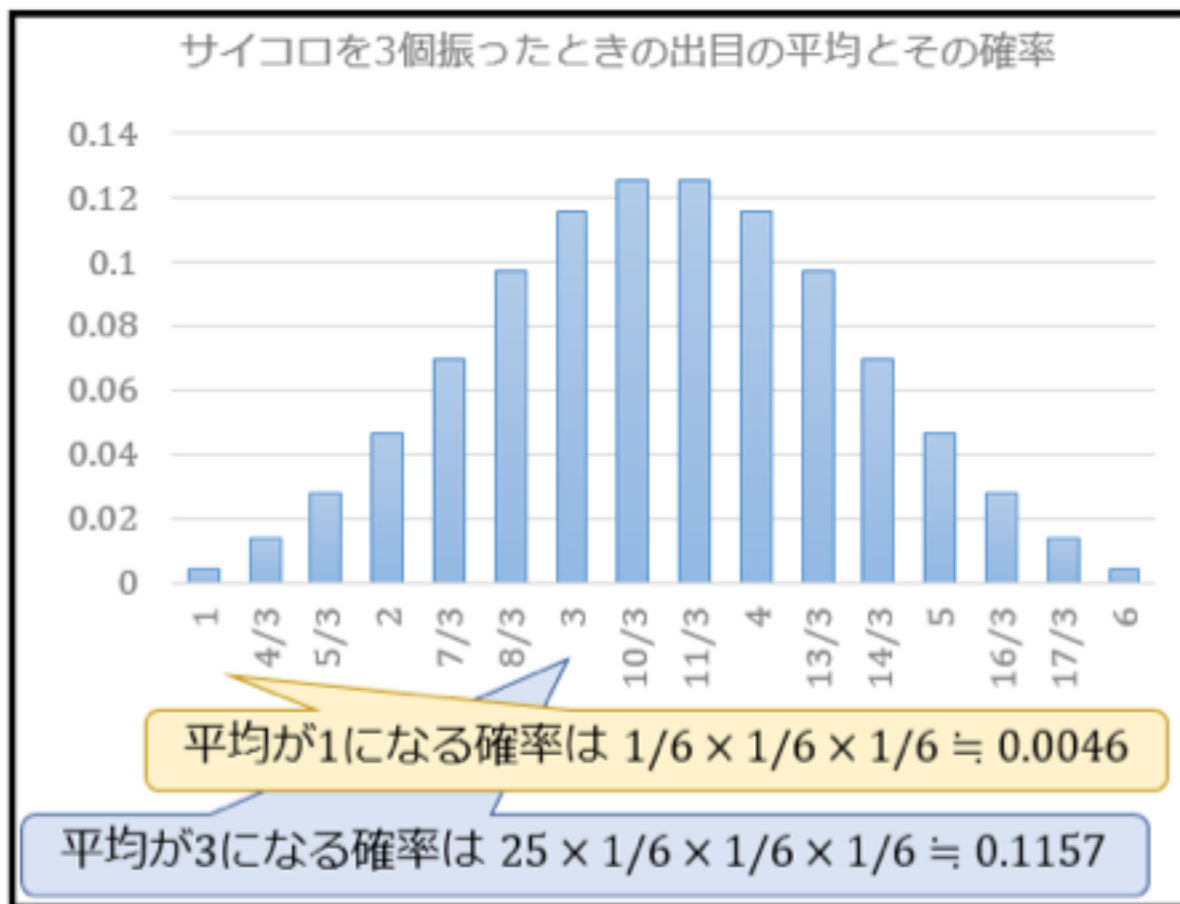
出目の平均が3
になる確率

$$5 \times 1/6 \times 1/6 \approx 0.1389$$

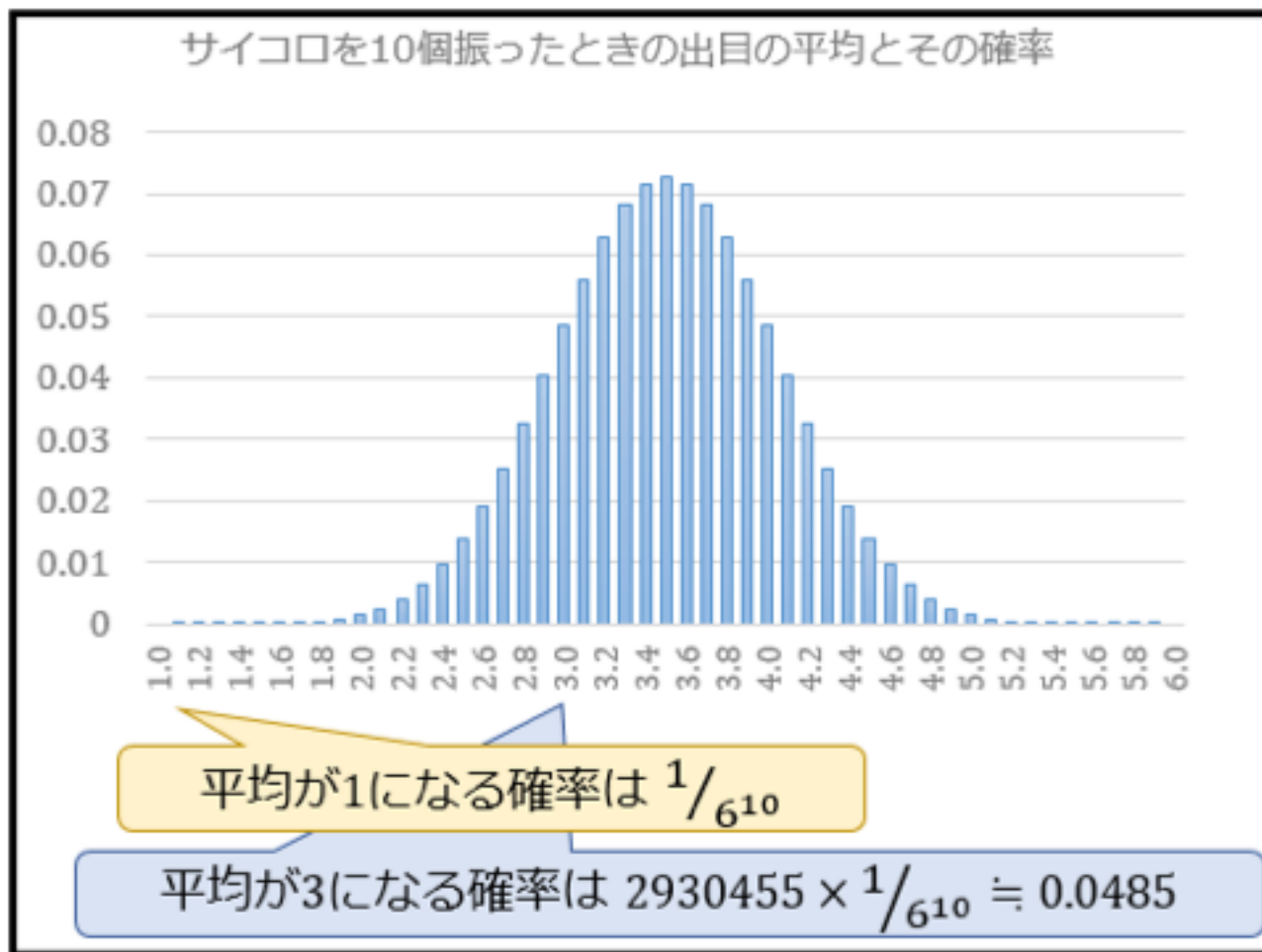
中心極限定理



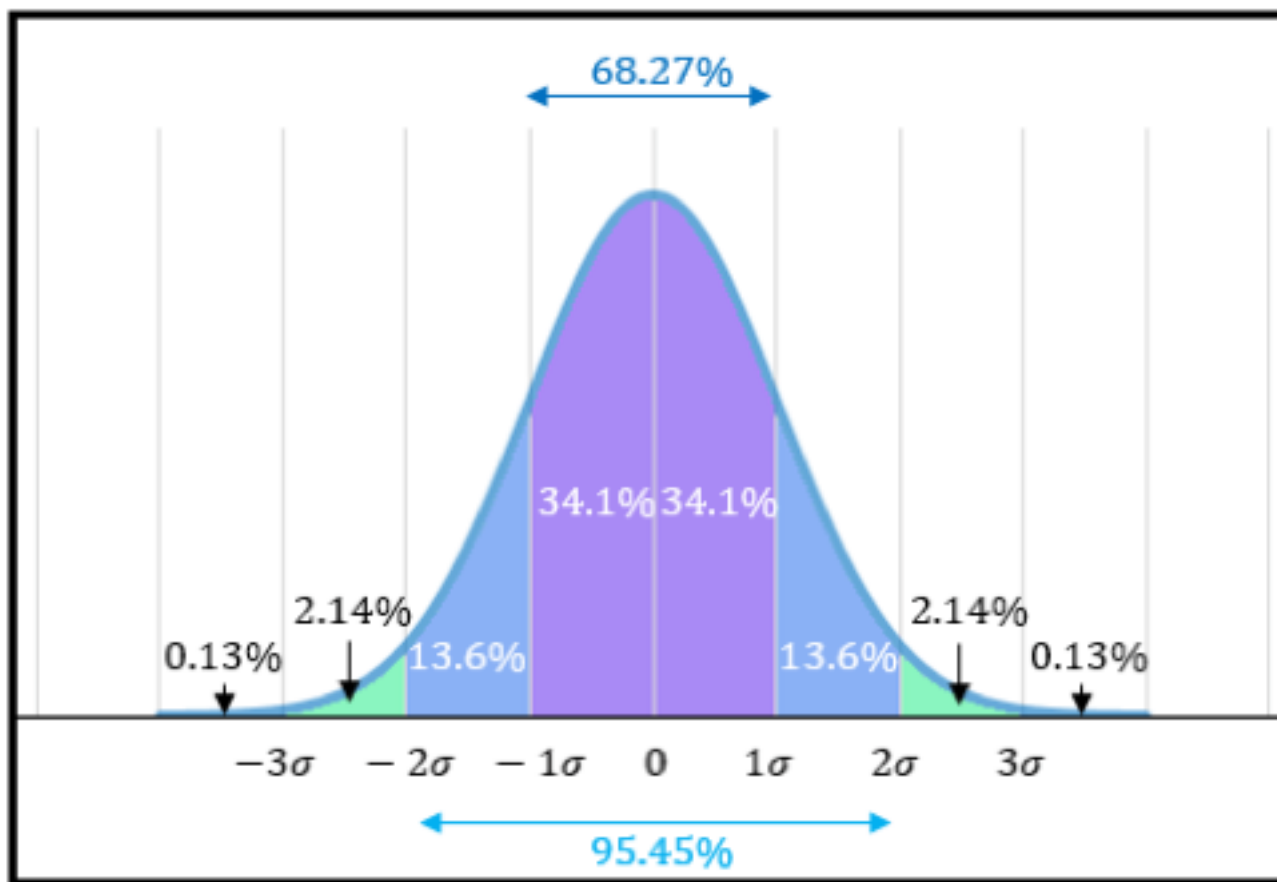
中心極限定理



中心極限定理



中心極限定理



正規分布